CONCOURS SPECIAL 1978

CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures.

DOCUMENTS AUTORISÉS. — *Tables de valeurs numériques, tables de logarithmes, règle à calcul.*

1° Soit la fonction f de la variable t, $t \in \mathbb{R}$:

$$t \longmapsto f(t) = \frac{1 - t^2}{\sqrt{|4 - t^4|}}.$$

Dresser le tableau des variations de cette fonction et construire le graphique de f pour $t \geqslant 0$. (Système d'axes orthonormés, unité sur chacun des deux axes : 2 centimètres.)

2° Soit la fonction Φ de la variable x définie par : $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a. Prouver que Φ est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que Φ est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera. Écrire les 4 premiers termes non nuls et les termes en x^{4n+1} et x^{4n+3} de ce développement.

c. Calculer $\Phi(1)$ à 10^{-3} près.

3° *Calcul de* $\Phi\left(\sqrt{2}\right)$.

a. On pose :

$$g(t) = \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2 - t^2}} \quad \text{pour} \quad t \in \left[1, \sqrt{2}\right[$$

Démontrer que pour : $1 \leqslant t_1 < t_2 < \sqrt{2}$, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt = \frac{t_1}{2}\sqrt{2 - t_1^2} - \frac{t_2}{2}\sqrt{2 - t_2^2}$$

b. Calculer avec une erreur inférieure ou au plus égale à 10^{-5}, les valeurs de la fonction $t \longrightarrow \frac{t}{2}\sqrt{2 - t^2}$ pour les valeurs suivantes de t :

$$1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}36;\ 1{,}4;\ \sqrt{2}.$$

On présentera les calculs dans un tableau.

.../...

c. En remarquant que, pour $t \in [t_1, t_2]$, on a :

$$-\frac{g(t)}{\sqrt{2+t_1^2}} \leqslant f(t) \leqslant -\frac{g(t)}{\sqrt{2+t_2^2}}$$

donner un encadrement de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ dans les 6 cas suivants d'intervalle $[a, b]$:

$$[1;\ 1{,}1],\quad [1{,}1;\ 1{,}2],\quad [1{,}2;\ 1{,}3],\quad [1{,}3;\ 1{,}36],\quad [1{,}36;\ 1{,}4],\quad \left[1{,}4;\ \sqrt{2}\right]$$

d. En déduire une valeur approchée de $\int_1^{\sqrt{2}} f(t)\,dt$ et indiquer la précision obtenue.

En déduire une valeur approchée de $\Phi(\sqrt{2})$ avec la précision obtenue.

4° *Calcul de* $\Phi\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ $\left[\text{on remarquera } f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -1\right]$.

a. On pose :

$$h(t) = \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2-2}} \quad \text{pour } t > \sqrt{2}.$$

Démontrer que pour : $\sqrt{2} < t_1 < t_2$, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} h(t)\,dt = \frac{t_2}{2}\sqrt{t_2^2-2} - \frac{t_1}{2}\sqrt{t_1^2-2}$$

b. Calculer avec une erreur inférieure, ou au plus égale à 10^{-5}, les valeurs de la fonction :

$t \longmapsto \frac{t}{2}\sqrt{t^2-2}$ pour les valeurs suivantes de t :

$$\sqrt{2};\quad 1{,}44;\quad 1{,}50;\quad 1{,}56;\quad \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

c. Comme au paragraphe 3° *c.*, donner un encadrement de l'intégrale $\int_c^d f(t)\,dt$ dans les 4 cas suivants d'intervalles $[c, d]$:

$$\left[\sqrt{2};\ 1{,}44\right],\quad [1{,}44;\ 1{,}50],\quad [1{,}50;\ 1{,}56],\quad \left[1{,}56;\ \sqrt{\frac{5}{2}}\right].$$

d. En déduire une valeur approchée de $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} f(t)\,dt$ et indiquer la précision obtenue.

En déduire une valeur approchée de $\Phi\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ et indiquer la précision obtenue.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail